УДК 517.546.1

*Т. В. Жаркова, А. В. Казанцев*

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАХОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ЯНОВСКОГО

*Аннотация*. Пусть $\Delta = \{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 : \alpha+\beta > 0, \alpha \le 1, \beta \le 1\}$ и $(\alpha,\beta) \in \Delta$. Класс Яновского $S^*[\alpha,\beta]$ есть класс функций $f$, голоморфных в $\mathbf{D}$ и таких, что $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и $\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) \prec (1+\beta\zeta)/(1-\alpha\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{D}$. Пусть $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$ – подкласс $S^*[\alpha,\beta]$ с условием $f''(0) = 0$, задающим нулевой корень уравнения Гахова $f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$. Область единственности для семейства $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$, есть множество $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ такое, что для любых $(\alpha,\beta) \in \tilde{\Delta}$ и $f \in \tilde{S}^*[\alpha,\beta]$ уравнение Гахова имеет единственный корень. Найдена максимальная (по включению) область единственности для семейства $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$. Пусть $\Delta' = \Delta_0' \cup \Delta_1 \cup \Delta_2'$, где $\Delta_0' = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : |2\beta - 3\alpha| \le 3, 3(\alpha+\beta) \le 2\}$, $\Delta_1 = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : 2\beta - 3\alpha > 3\}$ и $\Delta_2' = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : 2\beta - 3\alpha < -3, \alpha < \alpha(\beta), \beta \in (-1,-1/5)\}$, а $\alpha(\beta) = 1 - (1+\beta)^3/[(1+\beta)^2 - 16\beta]$, $\beta \in (-1,0)$. Теорема. *Множество $\Delta'$ является максимальной областью единственности для семейства классов $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$*, $(\alpha,\beta) \in \Delta$. Таким образом, дано полное и окончательное решение проблемы, поставленной и частично решенной А. В. Казанцевым в 1998 г. Получена двупараметрическая серия условий единственности; установлено новое свойство известных классов однолистных функций. Метод доказательства основан на применении леммы Шварца, вычислении неулучшаемой постоянной в оценке левой части уравнения Гахова и анализе зависимости указанной постоянной от параметров.

*Ключевые слова*: однолистные функции, классы Яновского, уравнение Гахова.

*T. V. Zharkova, A. V. Kazantsev*

# ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF GAHOV EQUATION FOR THE FUNCTIONS IN THE JANOWSKI CLASSES

*Abstract*. Let $\Delta = \{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 : \alpha+\beta > 0, \alpha \le 1, \beta \le 1\}$ and $(\alpha,\beta) \in \Delta$. Janowski class $S^*[\alpha,\beta]$ is the class of the functions $f$ holomorphic in $\mathbf{D}$ and so that $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ and $\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) \prec (1+\beta\zeta)/(1-\alpha\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{D}$. Let $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$ be the subclass of $S^*[\alpha,\beta]$ with the condition $f''(0) = 0$ defining the zero root of the Gahov equation $f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$. The domain of uniqueness for the family $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$, is the set $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ such that for any $(\alpha,\beta) \in \tilde{\Delta}$ and $f \in \tilde{S}^*[\alpha,\beta]$ the Gahov equation has the unique root. The maximal (on inclusion) domain of uniqueness for the family $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$, is find. Let $\Delta' = \Delta_0' \cup \Delta_1 \cup \Delta_2'$, where $\Delta_0' = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : |2\beta - 3\alpha| \le 3, 3(\alpha+\beta) \le 2\}$, $\Delta_1 = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : 2\beta - 3\alpha > 3\}$ and $\Delta_2' = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : 2\beta - 3\alpha < -3, \alpha < \alpha(\beta), \beta \in (-1,-1/5)\}$, while $\alpha(\beta) = 1 - (1+\beta)^3/[(1+\beta)^2 - 16\beta]$, $\beta \in (-1,0)$. Theorem. *The set $\Delta'$ is the maximal domain of uniqueness for the family of the classes $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$*, $(\alpha,\beta) \in \Delta$. Thus, the article adduces the full and complete solution for the problem posed and particularly solved in 1998 by the second author. The impact of the result: 1) two-parametrical series of the uniqueness conditions is obtained; 2) new property of the well-known classes of the univalent functions is established. The proving method is based on the use of the Schwarz lemma, the calculation of the sharp constant in the estimate of the left-hand side of Gahov equation, and the analysis of the dependence of the constant mentioned on the parameters.

*Key words*: univalent functions, Janowski classes, Gahov equation.

**$1^0$.** Уравнение Гахова

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \tag{1}$$

для голоморфной и локально однолистной (т.е. $f' \neq 0$) в круге $\mathbf{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ функции $f$ является условием разрешимости ряда граничных задач теории аналитических функций и математической физики (см., напр., [1, § 33; 2, гл. 4, § 13). Интерес к уравнению (1) обусловлен, в частности, восходящей к [3] и впервые исследованной в [4, 5] связью с гиперболической производной

$$h_f(\zeta) = (1-|\zeta|^2)\,|f'(\zeta)|. \tag{2}$$

функции $f$ [6]. Как известно [7], величина (2) совпадает с внутренним конформным радиусом образа $f(\mathbf{D})$ в точке $f(\zeta)$, где $\zeta \in \mathbf{D}$.

Совпадение решений (1) с критическими точками функции (2) – максимумами, седлами и полуседлами [8] – используется при поиске условий единственности корня уравнения Гахова. В работах [9–11] такие условия строились по некоторым подклассам однолистных функций в форме ограничений на числовые параметры, определяющие подкласс, и в ряде случаев доведены до неулучшаемых. При этом наличие у (1) корня $\zeta = 0$ (т.е. условие $f''(0) = 0$) постулировалось изначально, задача при этом состояла в определении множества параметров, обеспечивающих выполнение оценки (ср. с (1))

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| < 2|\zeta|/(1-|\zeta|^2),\ \zeta \in \mathbf{D} \setminus \{0\}, \tag{3}$$

из которой, в частности, следует убывание функции (2) вдоль радиусов $\mathbf{D}$.

Данную схему удобно формализовать следующим образом. Пусть $\Omega \subset R^k$ и для каждого $\omega \in \Omega$ определен некоторый класс $X_\omega$ функций $f$, голоморфных и локально однолистных в $\mathbf{D}$. Подмножество $U \subset \Omega$ назовем *областью единственности* для семейства классов $X_\omega$, $\omega \in \Omega$, если при каждом $\omega \in U$ и любой $f \in X_\omega$ уравнение (1) имеет единственный корень в $\mathbf{D}$, и этот корень – максимум функции (2). Построение *неулучшаемого* условия единственности вида $f \in X_\omega$, $\omega \in U'$, означает вычисление *максимальной* (по включению) области единственности для семейства $X_\omega$, $\omega \in \Omega$.

Условие на корень (максимум) исключает из приведенной постановки «патологии» такие, например, как в случае $f(\zeta) = \zeta/(1-\zeta^2)$, когда уравнение (1) имеет единственное решение $\zeta = 0$ в $\mathbf{D}$ – седло поверхности $h = h_f(\zeta)$, которая имеет еще два бесконечных максимума на $\partial\mathbf{D}$ [9]. Подобные «патологии» можно наблюдать и в настоящем исследовании (случай $\alpha = 1$, $\beta \in (-1/3, 1)$ в п. $4^0$).

Пусть $\Delta = \{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 : \alpha + \beta > 0, \alpha \le 1, \beta \le 1\}$. Рассмотрим класс $S^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$, функций $f$, голоморфных в $\mathbf{D}$ с условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec \frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta}, \ \zeta \in \mathbf{D}, \tag{4}$$

означающими существование функции $\varphi$ из леммы Шварца [12, с. 356–357] такой, что

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1+\beta\varphi(\zeta)}{1-\alpha\varphi(\zeta)}, \ \zeta \in \mathbf{D}. \tag{5}$$

Отметим, что из определения класса $S^*[\alpha,\beta]$ следует звездообразность (а значит, и однолистность) его элементов. Классы $S^*[\alpha,\beta]$ вошли в обиход теории однолистных функций благодаря работам В. Яновского [13]; вместо параметров $\alpha$ и $\beta$ использовались $A = \beta$ и $B = -\alpha$.

Пусть $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$ – подкласс $S^*[\alpha,\beta]$, выделяемый дополнительной нормировкой $f''(0) = 0$, или, эквивалентно, оценкой $|\varphi(\zeta)| \le |\zeta|^2$, $\zeta \in \mathbf{D}$, в (5).

В настоящей статье вычисляется максимальная область единственности для семейства $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$.

Развиваемое здесь исследование было задумано еще в середине 1990-х гг. как продолжение части работы в рамках [10]. В статье [14] на эту тему был представлен результат промежуточного характера с рядом пробелов в доказательстве. В настоящей статье дан новый, решающий подход к проблеме, основанный на вычислении неулучшаемой постоянной в оценке левой части уравнения Гахова с последующим анализом зависимости указанной постоянной от параметров (см. далее лемму и следствия 1–3).

**$2^0$**. Нам понадобится разбиение множества $\Delta$ в дизъюнктное объединение трех его подмножеств $\Delta_0$, $\Delta_1$ и $\Delta_2$, выделяемых соответственно неравенствами $|2\beta - 3\alpha| \le 3$, $2\beta - 3\alpha > 3$ и $2\beta - 3\alpha < -3$ (рис. 1).

Начнем с обоснования оценки сверху величины

$$F(\zeta; f) = (1 - |\zeta|^2)\,|f''(\zeta)/(\zeta f'(\zeta))|$$

при $\zeta \in \mathbf{D}$ в классах $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta) \in \Delta$.

**Лемма**. Пусть $(\alpha,\beta) \in \Delta$ и $f \in \tilde{S}^*[\alpha,\beta]$. Имеет место неулучшаемая оценка

$$F(\zeta; f) \le g(\alpha,\beta), \ \zeta \in \mathbf{D}, \tag{6}$$

где $g(\alpha,\beta)=3(\alpha+\beta)$, если $(\alpha,\beta)\in\Delta_0$, а в случае $(\alpha,\beta)\in\Delta_1\cup\Delta_2$ будет

$$g(\alpha,\beta)=(\alpha+\beta)^{-1}[|3\alpha-\beta|+\beta(5\alpha+\beta)-2\sqrt{2|\beta||3\alpha+\beta|(1-|\alpha|)(1-|\beta|)}\,]. \quad (7)$$

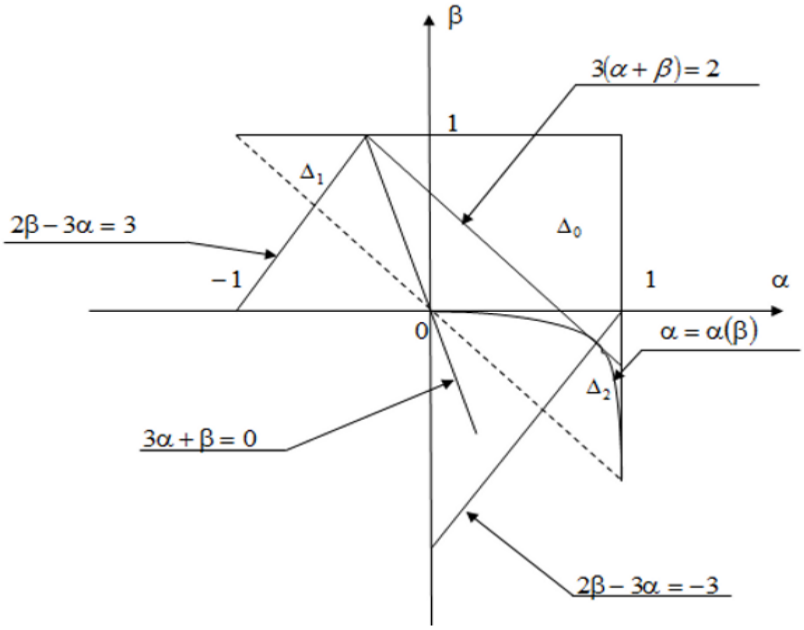


Рис. 1. Разбиение множества $\Delta$

**Доказательство**. Условие (5) влечет за собой представление

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\frac{(\alpha+\beta)\zeta\varphi'}{(1+\beta\varphi)(1-\alpha\varphi)}+\frac{(\alpha+\beta)\varphi}{1-\alpha\varphi},\ \varphi=\varphi(\zeta),\ \zeta\in\mathbf{D}. \quad (8)$$

Исходя из (8), оценим $F(\zeta;f)$ с помощью леммы Шварца: $|\varphi|\le|\zeta|^2$ в $\mathbf{D}$, а также неравенств $|\mathrm{Re}\,\varphi|\le|\varphi|$:

$$|1-\alpha\varphi|\ge 1-\alpha\,\mathrm{Re}\,\varphi \text{ и } |1+\beta\varphi|\ge 1+\beta\,\mathrm{Re}\,\varphi, \quad (9)$$

эффективных для исследования подчиненностей вида (4) [10].

Получаем

$$F(\zeta;f)\le(\alpha+\beta)\left[\frac{2(1-|\varphi|)}{|1+\beta\varphi||1-\alpha\varphi|}\frac{1+|\varphi|}{1+|\zeta|^2}+\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\alpha\varphi|}\right]\le$$

$$\le G(\mathrm{Re}\,\varphi;\alpha,\beta)\le g(\alpha,\beta), \quad (10)$$

где $\zeta\in\mathbf{D}$, $\varphi=\varphi(\zeta)$, $g(\alpha,\beta)=\sup_{t\in(-1,1)}G(t;\alpha,\beta)$;

$$G(t;\alpha,\beta)=\left[2\beta/(1+\beta t)+(3\alpha+\beta)/(1-\alpha t)\right](1-|t|). \quad (11)$$

Очевидно, функция $G(t;\alpha,\beta)$ непрерывна на $[-1,1]$ при любом $(\alpha,\beta)\in\Delta$. Однако (10) налагает ограничение $t\in(-1,1)$, которого мы и придерживаемся.

Поиск экстремума функции (11) основан на представлении

$$(\partial / \partial |t|) G(t;\alpha,\beta) = -(\alpha+\beta)(1+\beta t)^{-2}(1-\alpha t)^{-2}\gamma(t;\alpha,\beta), \qquad (12)$$

причем в $\Delta_0$ и $\Delta_1 \cup \Delta_2$ используются различные формы функции $\gamma(t;\alpha,\beta)$.

***Случай*** $(\alpha,\beta)\in\Delta_0$. Выражение для $\gamma$ запишем в виде

$$\gamma(t;\alpha,\beta) = \left[3+(2\beta-3\alpha)s\right](1-|t|)^2 + 2(1+\beta s)(1-\alpha s)\left[1-(1-|t|)^2\right] +$$

$$+(1-\alpha s)\left[(1+\beta s)^2 - (1-|t|)^2\right], \qquad (13)$$

где $s = \operatorname{sgn} t$. Так как $|2\beta - 3\alpha| \le 3$ по определению $\Delta_0$, то $3+(2\beta-3\alpha)s \ge 0$ при $0<|t|<1$. Значит, все три слагаемые в (13) неотрицательны, поэтому $G(t;\alpha,\beta)$ не возрастает при $0<|t|<1$ в силу (12). В итоге

$$g(\alpha,\beta) = G(0;\alpha,\beta) = 3(\alpha+\beta). \qquad (14)$$

Исчезновение первых двух слагаемых (13) в точке $t_0$ с $0<|t_0|<1$ приводит к двум возможностям: $s=-1$, $\alpha=-1/3$, $\beta=1$; или $s=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$, причем в обоих случаях третье слагаемое в (13) также обращается в нуль. Таким образом, если $(\alpha,\beta)\in\Delta_0 \setminus \{(-1/3,1),(1,0)\}$, то $\gamma(t;\alpha,\beta)>0$ при $0<|t|<1$, значит, $t=0$ – единственная точка максимума функции $G$ на $(-1,1)$.

Очевидно, функции $G(t;1,0)$ и $G(t;-1/3,1)$ достигают своих максимумов на целых промежутках значений $t$: $g(1,0)=3$ достигается в каждой точке полуинтервала $[0,1)$ $(s=1)$, $g(-1/3,1)=2$ – в каждой точке из $(-1,0]$ $(s=-1)$.

***Случай*** $(\alpha,\beta)\in\Delta_1\cup\Delta_2$. Нам предстоит следить за знаками величин в довольно громоздких выражениях. Поэтому воспользуемся тем, что при рассматриваемых значениях параметров имеют место равенства

$$\varepsilon := \operatorname{sgn}\alpha = -\operatorname{sgn}\beta = -\operatorname{sgn}(2\beta-3\alpha) = \operatorname{sgn}(3\alpha+\beta) = \operatorname{sgn}(3\alpha-\beta). \qquad (15)$$

Исследуем $G$ на половинах $s=\pm\varepsilon$ интервала $(-1,1)$. В силу (15) при $s=-\varepsilon$ имеем $3+(2\beta-3\alpha)s = 3+|2\beta-3\alpha|>0$. Тогда из (13) следует, что $\gamma(t;\alpha,\beta)>0$, $0<|t|<1$. Значит, $G$ убывает с ростом $|t|$ от 0 до 1 при $\operatorname{sgn} t = -\varepsilon$, откуда

$$\sup_{0<|t|<1} G(t;\alpha,\beta) = G(0;\alpha,\beta) = 3(\alpha+\beta). \qquad (16)$$

Пусть теперь $s=\varepsilon$. Функцию $\gamma$ удобно представить в виде квадратичного полинома от $1-|t|$:

$$\gamma(t;\alpha,\beta) = \beta[2\alpha+\beta(1-\alpha\varepsilon)](1-|t|)^2 - 2\beta\varepsilon(1+\beta\varepsilon)(1-\alpha\varepsilon)(1-|t|) +$$

$$+(1+\beta\varepsilon)(1-\alpha\varepsilon)(3+\beta\varepsilon). \qquad (17)$$

Старший коэффициент $\beta[2\alpha+\beta(1-\alpha\varepsilon)] =: -q(\alpha,\beta)$ отличен от нуля:

$$q(\alpha,\beta)=|\beta|[3|\alpha|-1+(1-|\beta|)(1-|\alpha|)]>0, \qquad (18)$$

так как при $(\alpha,\beta)\in\Delta_1\cup\Delta_2$ будет $|\alpha|>1/3$.

Дискриминант указанного полинома имеет вид

$$d=-2\beta(3\alpha+\beta)(1-|\beta|)(1-|\alpha|), \qquad (19)$$

причем $d\ge 0$ в силу $\beta(3\alpha+\beta)<0$ (см. (15)), а равенство $d=0$ возможно только при $(\alpha,\beta)\in\partial_1\cup\partial_2$, где

$$\partial_1=(-1,-1/3)\times\{1\},\ \partial_2=\{1\}\times(-1,0). \qquad (20)$$

Условие $d\ge 0$ позволяет переписать (17) в виде произведения

$$\gamma(t;\alpha,\beta)=q(\alpha,\beta)[1-|t|+n(\alpha,\beta)][|t|-m(\alpha,\beta)], \qquad (21)$$

в котором

$$n(\alpha,\beta)=[\sqrt{d}-|\beta|(1-|\beta|)(1-|\alpha|)]/q(\alpha,\beta) \text{ и}$$

$$m(\alpha,\beta)=1-[\sqrt{d}+|\beta|(1-|\beta|)(1-|\alpha|)]/q(\alpha,\beta). \qquad (22)$$

Оценка $n(\alpha,\beta)\ge 0$ очевидна, если записать $d$ в терминах коэффициентов (17). При этом $n(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)\in\partial_1\cup\partial_2$. Таким образом, второй сомножитель в (21) положителен при $0<|t|<1$. С учетом (18) отсюда следует, что знакоопределяющим для функции $\gamma$ является ее третий сомножитель.

Неравенство $m(\alpha,\beta)\le 1$ немедленно получается из (22) и (18); $m(\alpha,\beta)=1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)\in\partial_1\cup\partial_2$. Чтобы оценить $m(\alpha,\beta)$ снизу, представим (22) в виде

$$m(\alpha,\beta)=[|\beta|(3|\alpha|-1)-\sqrt{d}]/q(\alpha,\beta). \qquad (23)$$

Определение знака числителя (23) использует запись дискриминанта $d$ для представления $\gamma$ в виде квадратичного полинома от $|t|$. Имеем

$$d=\beta^2(3|\alpha|-1)^2+q(\alpha,\beta)[3-|2\beta-3\alpha|]<|\beta|^2(3|\alpha|-1)^2, \qquad (24)$$

так как $|2\beta-3\alpha|>3$ при $(\alpha,\beta)\in\Delta_1\cup\Delta_2$. Поэтому $0<m:=m(\alpha,\beta)\le 1$.

Таким образом, из (12) и (21) следует, что при $\operatorname{sgn} t=\varepsilon$ с ростом $|t|$ функция $G$ возрастает на $(0,m)$ и (в случае $m<1$) убывает на $(m,1)$. С учетом (16) отсюда получаем соотношение

$$g(\alpha,\beta)=G(m(\alpha,\beta)\varepsilon;\alpha,\beta), \qquad (25)$$

справедливое и при $m(\alpha,\beta)=1$.

Подсчет $g(\alpha,\beta)$ весьма трудоемок, получающееся в итоге выражение (7) приводится как наименее громоздкое.

Остается доказать неулучшаемость оценки (6). Рассмотрим функцию $f=f_{\alpha,\beta}$, определяемую из (5) при $\varphi(\zeta)=\zeta^2$, и положим

$$\tau(\alpha,\beta) = m(\alpha,\beta)\varepsilon. \qquad (26)$$

Пусть $\omega$ – произвольная вещественная или мнимая точка $\mathbf{D}$.

В силу (25)

$$F(\omega; f_{\alpha,\beta}) = G(\omega^2;\alpha,\beta) \le G(\tau(\alpha,\beta);\alpha,\beta) = g(\alpha,\beta). \qquad (27)$$

Если $\tau = \tau(\alpha,\beta) \in (-1,1)$, то равенство в (27) (т.е. в (10) с $f = f_{\alpha,\beta}$ и $\zeta = \omega$) достигается на $\mathbf{D}$: $\omega = \pm\sqrt{\tau}$. Если же $|\tau| = 1$, то неулучшаемость оценки (6) означает выполнение соотношения $\sup\limits_{\omega^2\in(-1,1)} F(\omega; f_{\alpha,\beta}) = g(\alpha,\beta)$, которое следует из непрерывности функции $G(t;\alpha,\beta)$ в точках $t = \pm 1$.

Лемма доказана.

**3**$^0$. Продолжим несколько сюжетов из п. 2$^0$. Справедливо

**Следствие 1**. Функция $\tau:\Delta \to [-1,1]$, заданная в $\Delta_1 \cup \Delta_2$ формулами (26), (23), (15) и доопределяемая в $\Delta_0$ нулем, будет непрерывной на множестве $\Delta \setminus \{(-1/3,1),(1,0)\}$. Для каждого $(\alpha,\beta) \in \Delta \setminus \{(-1/3,1),(1,0)\}$ функция $G(t;\alpha,\beta)$ на $[-1,1]$ имеет единственный максимум в точке $\tau = \tau(\alpha,\beta)$; при этом $\tau = -1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in \partial_1$ и $\tau = +1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in \partial_2$, где $\partial_1$ и $\partial_2$ определены в (20).

**Доказательство**. Обозначим $\pi_{\pm} = \Delta \cap \{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 : 2\beta - 3\alpha = \pm 3\}$. Легко проверить, что если $(\alpha,\beta) \in \pi_{\pm}$, то $q(\alpha,\beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\alpha,\beta) \in \{(-1/3,1),(1,0)\}$. Исключая точки $(-1/3,1)$ и $(1,0)$ из соответствующих $\pi_{\pm}$, получим интервалы $\pi^0_{\pm}$ прямых $2\beta - 3\alpha = \pm 3$. Функция (26) непрерывна на $\Delta_1 \cup \pi^0_+$ и $\Delta_2 \cup \pi^0_-$ и при стремлении $(\alpha,\beta)$ к точкам на $\pi^0_{\pm}$ изнутри $\Delta_1$ и $\Delta_2$ будет $\tau(\alpha,\beta) \to 0$ (см. (23)). Итак, заданное продолжение склеивает значения $\tau$ на $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и $\Delta_0 \setminus \{(-1/3,1),(1,0)\}$ в непрерывную функцию и объединяет формулы (14) и (25) в одну:

$$g(\alpha,\beta) = G\big(\tau(\alpha,\beta);\alpha,\beta\big),\ (\alpha,\beta) \in \Delta \setminus \{(-1/3,1),(1,0)\}. \qquad (28)$$

Обоснование второго утверждения следствия содержится в доказательстве леммы: после формулы (14) и при получении (25). Вычисление подмножеств из $\Delta \setminus \{(-1/3,1),(1,0)\}$, на которых $\tau = \pm 1$, проверяется непосредственно.

Наконец, при рассматриваемом продолжении функции $\tau$ в $\Delta_0$ в качестве $\tau(-1/3,1)$ можно было бы взять любую точку отрезка $[-1,0]$, а в качестве $\tau(1,0)$ – любую точку на $[0,1]$ (см. случай $(\alpha,\beta) \in \Delta_0$ в доказательстве леммы). При этом отображение $(\alpha,\beta,\tau) \mapsto (\alpha,\beta)$ над окрестностями обеих «исключенных точек» имеет характер раздутия; соответствующие отрезки изменения $\tau$ заполняются пределами функции $\tau(\alpha,\beta)$ по направлениям прямых, проходящих через указанные точки и заметающих $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Следствие 1 доказано. Построенную в нем функцию на $\Delta$ и будем теперь понимать под $\tau = \tau(\alpha,\beta)$.

Выпишем явный вид функции $f_{\alpha,\beta}$, восстанавливаемой из (5) с $\varphi(\zeta)=\zeta^2$:

$$f_{\alpha,\beta}(\zeta)=\zeta(1-\alpha\zeta^2)^{-(1+\beta/\alpha)/2} \text{ при } \alpha\neq 0,$$

$$f_{0,\beta}(\zeta)=\zeta e^{\beta\zeta^2/2}. \qquad (29)$$

Отметим, что функция $F(\zeta;f_{\alpha,\beta})$ непрерывна в $\overline{\mathbf{D}}$ для любого $(\alpha,\beta)\in\Delta$, и усилим утверждение, обоснованное в финале доказательства леммы.

**Следствие 2**. Пусть $(\alpha,\beta)\in\Delta$, $\tau=\tau(\alpha,\beta)$ и точка $a\in\overline{\mathbf{D}}$ такова, что $F(a;f_{\alpha,\beta})=F(\pm\sqrt{\tau};f_{\alpha,\beta})$. Тогда $a=\pm\sqrt{\tau}$ при $(\alpha,\beta)\in\Delta\setminus\{(-1/3,1),(1,0)\}$, $a$ – любая точка отрезка $[-i,i]$ при $(\alpha,\beta)=(-1/3,1)$, $a$ – любая точка отрезка $[-1,1]$ при $(\alpha,\beta)=(1,0)$.

**Доказательство**. При анализе равенства в (27) показано, что

$$F(\pm\sqrt{\tau};f_{\alpha,\beta})=G(\tau;\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta). \qquad (30)$$

По условию отсюда получается, что $F(a;f_{\alpha,\beta})=g(\alpha,\beta)$. Это означает, что при $\zeta=a$ и $f=f_{\alpha,\beta}$ (т. е. $\varphi(\zeta)=\zeta^2$) в (10) имеет место цепочка равенств:

$$F(a;f_{\alpha,\beta})=F(\operatorname{Re}a^2;\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta), \qquad (31)$$

в частности, равенства выполняются и в (9), так что $a^2\in\mathbb{R}$. Тогда корректно определена величина $G(a^2;\alpha,\beta)$ и из (30) и (31) следует равенство

$$G(a^2;\alpha,\beta)=G(\tau;\alpha,\beta). \qquad (32)$$

Согласно следствию 1, если $(\alpha,\beta)\neq(-1/3,1)$, $(1,0)$, то $\tau=\tau(\alpha,\beta)$ – единственная точка экстремума функции $G$. Поэтому (32) сразу же влечет за собой $a^2=\tau$. Оставшиеся утверждения следствия 2 – переформулировка в терминах $a$ заключительной части доказательства следствия 1.

Следствие 2 доказано.

**Следствие 3**. Функция $g(\alpha,\beta)$, заданная на $\Delta_0$ формулой (14), а на $\Delta_1\cup\Delta_2$ – представлением (7), непрерывна в $\Delta$. Справедливы соотношения

$$g(\alpha,\beta)=2+\frac{\sqrt{1-\beta}}{3}\frac{(3\alpha+1)(25-\beta)-(1-\beta)(25-3\beta)}{-(5\alpha+\beta)\sqrt{1-\beta}+2\sqrt{-(3\alpha+\beta)\beta(1+\alpha)}},\ (\alpha,\beta)\in\Delta_1, \qquad (33)$$

$$g(\alpha,\beta)=2+\frac{(1+\beta)^2-16\beta}{(\alpha+\beta)(1+\beta)-4\beta(1-\alpha)+2\sqrt{d}}(\alpha-\alpha(\beta)),\ (\alpha,\beta)\in\Delta_2, \qquad (34)$$

где $d$ – дискриминант (19), а

$$\alpha(\beta)=1-\frac{(1+\beta)^3}{(1+\beta)^2-16\beta},\ \beta\in(-1,0)\,. \qquad (35)$$

Действительно, непрерывность $g(\alpha,\beta)$ в $\Delta$ можно проверить, опираясь на (28) либо склеивая выражения (14) и (7) вдоль прямых $2\beta-3\alpha=\pm3$; разрывов при $(\alpha,\beta)=(-1/3,1)$ и $(\alpha,\beta)=(1,0)$ здесь не возникает. Формулы (33) и (34) получаются преобразованиями из (7). Функция (35) убывает и выпукла вверх; касательной к ее графику в точке $(13/15,-1/5)$ оказывается прямая $3(\alpha+\beta)=2$.

**4**$^0$. Зададим множество $\Delta'=\Delta'_0\cup\Delta_1\cup\Delta'_2$, где $\Delta'_0=\{(\alpha,\beta)\in\Delta_0:3(\alpha+\beta)\le2\}$ и $\Delta'_2=\{(\alpha,\beta)\in\Delta_2:\alpha<\alpha(\beta),\,\beta\in(-1,-1/5)\}$. Справедлива

**Теорема**. Множество $\Delta'$ является максимальной областью единственности для семейства классов $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta)\in\Delta$.

**Доказательство**. Пусть $(\alpha,\beta)\in\Delta'$ и $f\in\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$. Тогда из (14), (33) и (34) следует, что $g(\alpha,\beta)\le2$, откуда в силу (10) получается неравенство $F(\zeta;f)\le2$, $\zeta\in\mathbf{D}$. Докажем, что имеет место оценка (3).

Вначале рассмотрим случай $(\alpha,\beta)\in\Delta_1$. В силу (33) условие $g(\alpha,\beta)=2$ влечет за собой $\beta=1$, т.е. $(\alpha,\beta)\in\partial_1$. Согласно следствию 1 при $-1<\alpha<-1/3$ единственный максимум функции $G(t;\alpha,1)$ на $[-1,1]$ достигается в точке $\tau=-1$. Поэтому строгое неравенство $G(t;\alpha,1)<G(-1;\alpha,1)=$ $=g(\alpha,1)=2$ справедливо для любого $t\in(-1,1]$. Значит, цепочка (10) приводит к неравенству (3), которое в силу (33) выполняется и в остальных точках множества $\Delta_1$.

Случай $(\alpha,\beta)\in\Delta'_2$ еще более простой: неравенство $g(\alpha,\beta)<2$, устанавливающее (3), следует из самого определения множества $\Delta'_2$ в силу (34).

Пусть теперь $(\alpha,\beta)\in\Delta'_0$. Предположим, что $a\in\mathbf{D}\setminus\{0\}$ – еще один (кроме $\zeta=0$) корень уравнения (1). Тогда $3(\alpha+\beta)=2$, соотношения (10) при $\zeta=a$ обращаются в равенства и по лемме Шварца получаем $\varphi(\zeta)=\xi\zeta^2$ с некоторым $\xi\in\partial\mathbf{D}$, откуда $f(\zeta)=\bar{\xi}f_{\alpha,\beta}(\xi\zeta)$ – вращение функции (29). При переходе $f\to f_\xi$ от функции $f$ к ее вращениям $f_\xi(\zeta)=\bar{\xi}f(\xi\zeta)$ ненулевые корни уравнения Гахова преобразуются поворотами $a\to a\bar{\xi}$; кроме того, $F(a;f)=F(a\bar{\xi};f_\xi)$. Поэтому без ограничения общности считаем $\xi=1$ и оказываемся в условиях следствия 2: благодаря (30) и равенству концов цепочки (10) при $f=f_{\alpha,\beta}$ и $\zeta=a$ мы должны иметь $F(a;f_{\alpha,\beta})=F(\pm\sqrt{\tau};f_{\alpha,\beta})$ $(\equiv2)$.

Множество $\Delta'_0$ содержит одну точку разрыва функции $\tau$: $(\alpha,\beta)=(-1/3,1)$. Здесь $f''_{-1/3,1}(\zeta)/f'_{-1/3,1}(\zeta)=2\zeta/(1+\zeta^2)$, но уравнение (1) имеет *единственный* корень $\zeta=0$ – противоречие с $a\ne0$. Противоречие будет и в остальных точках $(\alpha,\beta)\in\Delta_0'$, так как на $\Delta_0'\setminus\{(-1/3,1)\}$ имеем $a=\pm\sqrt{\tau}=0$ в силу следствий 1 и 2.

Итак, $\Delta'$ – область единственности для семейства $\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta)\in\Delta$.

Максимальность $\Delta'$ устанавливается с помощью анализа картины разрешимости уравнения (1) для семейства (29). Исследование оказывается весьма громоздким и приводит к следующим результатам. Для всех точек $(\alpha,\beta)\in\Delta$ выше прямой $3(\alpha+\beta)=2$, а также на ее участке $13/15<\alpha\le 1$, поверхность $h=h_{\alpha,\beta}(\zeta)$, кроме седла в $\zeta=0$, имеет два максимума, при $\alpha=1$ выходящих на $\partial\mathbf{D}$. Для остальной части $\Delta\setminus\Delta'$ корень $\zeta=0$ будет максимумом, причем на кривой $\alpha=\alpha(\beta)$, $\beta\in(-1,-1/5)$, функция $h_{\alpha,\beta}$ имеет еще два полуседла в точках $\pm\sqrt{\tau(\alpha(\beta),\beta)}$, а на множестве $\alpha>\alpha(\beta)$, $3(\alpha+\beta)<2$, $\beta\in(-1,-1/5)$, – два седла и два максимума (при $\alpha=1$ последние вновь выходят на $\partial\mathbf{D}$).

Теорема доказана.

### *Список литературы*


1. **Гахов, Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
2. **Фридман, А.** Вариационные принципы и задачи со свободными границами / А. Фридман. – М. : Наука, 1990. – 536 с.
3. **Гахов, Ф. Д.** Об обратных краевых задачах / Ф. Д. Гахов. – ДАН СССР. – 1952. – Т. 86, № 4. – С. 649–652.
4. **Rusheweyh, St.** On extreme Bloch functions with prescribed critical points / St. Rusheweyh, K.-J. Wirths // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.
5. **Аксентьев, Л. А.** Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области / Л. А. Аксентьев // Известия вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
6. **Казанцев, А. В.** Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных / А. В. Казанцев // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2011. – Т. 153, № 1. – С. 180–194.
7. **Haegi, H. R.** Extremalprobleme und Ungleichungen conformer Gebietsgrössen / H. R. Haegi // Compositio Math. – 1950. – Vol. 8. – F. 2. – S. 81–111.
8. **Киндер, М. И.** О числе решений уравнения Ф. Д. Гахова в случае многосвязной области / М. И. Киндер // Известия вузов. Математика. – 1984. – № 8. – С. 69–72.
9. **Аксентьев, Л. А.** О единственности решения внешней обратной краевой задачи / Л. А. Аксентьев, А. В. Казанцев, А. В. Киселев // Известия вузов. Математика. – 1984. – № 10. – С. 8–18.
10. **Аксентьев, Л. А.** О классах единственности внешней обратной краевой задачи / Л. А. Аксентьев, А. В. Казанцев, М. И. Киндер, А. В. Киселев // Труды семинара по краевым задачам. – Вып. 24. – Казань : Казан. ун-т, 1990.– С. 39–62.
11. **Аксентьев, Л. А.** Экстремальные задачи для площадей при конформном отображении и их применение / Л. А. Аксентьев, А. В. Казанцев, Н. И. Попов // Известия вузов. Математика. – 1995. – № 6. – С. 3–15.
12. **Голузин, Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1966. – 628 с.

13. **Janowski, W.** Some extremal problems for certain families of analytic functions. I / W. Janowski // Ann. Polon. Math. – 1973. – Vol. 28. – P. 297–326.
14. **Аксентьев, Л. А.** О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций / Л. А. Аксентьев, А. В. Казанцев, Н. И. Попов // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 8. – С. 3–13.

## *References*

1. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary-value problems]. Moscow: Nauka, 1977, 640 p.
2. Fridman A. *Variatsionnye printsipy i zadachi so svobodnymi granitsami* [Variational principles and problems with free boundaries]. Moscow: Nauka, 1990, 536 p.
3. Gakhov F. D. *Ob obratnykh kraevykh zadachakh* [On the issue of inverse boundaty-value problems]. DAN SSSR. 1952, vol. 86, no. 4, pp. 649–652.
4. Rusheweyh St., Wirths K.-J. *Math. Z.* 1982, vol. 180, pp. 91–106.
5. Aksent'ev L. A. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1984, no. 2, pp. 3–11.
6. Kazantsev A. V. *Uchenye zapiski Kazan-skogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki* [Kazan university memoir. Physical and mathematical sciences]. 2011, vol. 153, no. 1, pp. 180–194.
7. Haegi H. R. *Compositio Math*. 1950, vol. 8, F. 2, pp. 81–111.
8. Kinder M. I. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1984, no. 8, pp. 69–72.
9. Aksent'ev L. A., Kazantsev A. V., Kiselev A. V. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1984, no. 10, pp. 8–18.
10. Aksent'ev L. A., Kazantsev A. V., Kinder M. I., Kiselev A. V. *Trudy seminara po kraevym zadacham. Vyp. 24* [Proceedings of the seminar on boundary-value problems. Issue 24]. Kazan: Kazan. un-t, 1990, pp. 39–62.
11. Aksent'ev L. A., Kazantsev A. V., Popov N. I. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1995, no. 6, pp. 3–15.
12. Goluzin G. M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of complex variable functions. $2^{nd}$ edition]. 2-e izd., pererab. i dop. M: Nauka, 1966, 628 p.
13. Janowski W. *Ann. Polon. Math*. 1973, vol. 28, pp. 297–326.
14. Aksent'ev L. A., Kazantsev A. V., Popov N. I. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1998, no. 8, pp. 3–13.

***Жаркова Татьяна Васильевна***
аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Казань, ул. Кремлевская, 18)

E-mail: zharkova89@yandex.ru

***Zharkova Tat'yana Vasil'evna***
Postgraduate student, Kazan (Volga region) Federal University
(Kazan, 18 Kremlyovskaya str.)

***Казанцев Андрей Витальевич***
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Казань, ул. Кремлевская, 18)

E-mail: kazandrey0363@rambler.ru

***Kazantsev Andrey Vital'evich***
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematical statistics, Kazan (Volga region) Federal University
(Kazan, 18 Kremlyovskaya str.)

УДК 517.546.1

**Жаркова, Т. В.**

**О единственности решения уравнения Гахова для функций из классов Яновского** / Т. В. Жаркова, А. В. Казанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 108–119.